DOI: https://doi.org/10.36602/jsba.2026.22.04

طريقة التغاير التكراري لحل معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية من النوع الثاني

سماح بشير المجعوك
قسم الرياضيات ـ كلية العلوم ـ جامعة مصراتة
email: s.almajouksci.@misuratau.edu.ly.

تاريخ التقديم: 22-02-2026 تاريخ القبول: 18-08-2026 تاريخ النشر:10-09-2026

المخلص: في هذه الورقة، نقدم بعض الأفكار الأساسية لطريقة التغاير التكراري (VIM) لحل معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية غير الخطية. تُستخدم طريقة التغاير التكراري لحل فئة كبيرة من المسائل غير الخطية بكفاءة وسهولة ودقة، مع تقريبات تتقارب بسرعة إلى حلول دقيقة. بالنسبة للمسائل الخطية، يمكن الحصول على الحل الدقيق من خلال خطوة تكرار واحدة فقط لإمكانية تحديد مضاعف لاغرانج بدقة. تجدر الإشارة إلى أن مضاعف لاغرانج يقلل من عدد التكرارات على عامل التكامل، كما يقلل من حجم العمليات الحسابية. لا تتطلب الطريقة أي تحويل أو خطية من أي نوع. نُقدم امثلة عددية لتسليط الضوء على الميزات المهمة لطريقة (VIM) . تظهر الطريقة تحسينات على التقنيات العددية الحالية.

الكلمات المفتاحية: طريقة التغاير التكراري (VIM) ، معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية غير الخطية.

المقدمة

ظهرت المعادلات التكاملية التفاضلية في وقت مبكر من التطور الرياضي لديناميكيات السكان النظرية، وذلك في الأعمال الرائدة لعلماء رياضيات مثل فولتيرا و كوستيتزين، حيث درس فولتيرا التأثيرات الوراثية أثناء دراسته لنموذج نمو السكان. نتج عن ابحاثه ظهور كل من المؤثرات التفاضلية والتكاملية معًا في المعادلة نفسها، وأُطلق على هذا النوع الجديد من المعادلات اسم معادلات فولتيرا التكاملية-التفاضلية [27,26,18]، والتي تعطى بالصيغة

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)F(u(t))\,dt \quad (1)$$

حيث $u^{(n)}(x) = \frac{d^n u}{dx^n}$ تمثل المشتقة من الرتبة n للدالة $u(x)$ ، والدالة $f(x)$ والنواة $K(x,t)$ دوال حقيقية القيمة. والدالة $F(u(x))$ غير خطية في $u(x)$. ولأن المعادلة الناتجة في (1) تجمع بين المؤثر التفاضلي والمؤثر التكاملي، فمن الضروري تحديد الشروط الابتدائية $u(0), u'(0), \cdots, u^{(n-1)}(0)$ ، لتحديد الحل الخاص $u(x)$ لمعادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية (1). تتميز معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية بوجود مشتقة واحدة أو أكثر من المشتقات $u'(x), u''(x)$ خارج علامة التكامل. ظهرت معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية في العديد من التطبيقات الفيزيائية مثل عملية تشكيل الزجاج [15]، وديناميكا الموائع النانوية [14]. وانتقال الحرارة وعملية الانتشار بشكل عام، وانتشار النيوترونات، وتعايش الأنواع البيولوجية مع معدلات توليد متزايدة ومتناقصة، وتموجات الرياح في الصحراء وكذلك في علم الاحياء من خلال نماذج الافتراس وانتشار الأوبئة (Batiha et al) [9] وصولًا إلى دراسة التدفق الفسيولوجي في جسم الإنسان للبحاث (Zhou)[29] . يمكن العثور على المزيد من التفاصيل حول المصادر التي تنشأ منها هذه المعادلات في كتب الفيزياء وعلم الأحياء وتطبيقات الهندسة [26,25].

لتحديد حل للمعادلة التكاملية التفاضلية، يجب تحديد الشروط الابتدائية، ويمكن رؤية ذلك بوضوح كنتيجة لإدراج $u(x)$ ومشتقاتها. الشروط الابتدائية ضرورية لتحديد الحل الدقيق. توجد العديد من الطرق التحليلية والعددية لحل هذه المسائل من ضمنها طريقة كولكيشن بيرنشتاين التي اقترحها دافايفار (Davaeifar) في بحثه[13]، وأبرزها طريقة هوموتوبي الاضراب (HPM) [17,15,12]، وطريقة التحليل لأدوميان (ADM) [3] التي طُورت من قبل الباحثين لحل المسائل المعقدة في الفيزياء والهندسة، حيث ان كل طريقة منهما تقتصر على فئة محددة من المعادلات التكاملية التفاضلية. ونظرًا للصعوبات التي قد تواجهها الطرق التقليدية في إيجاد حلول دقيقة للمسائل غير الخطية، فقد حظيت طريقة التغاير التكراري (VIM) التي اقترحها العالم جي هيون هي (Ji-Huan He) [18] باهتمام واسع.

وتتميز هذه الطريقة بقدرتها العالية على معالجة المعادلات التكاملية التفاضلية دون الحاجة إلى معاملات اضطراب أو فرضيات مقيدة، مما يضمن سرعة تقارب الحل نحو النتيجة الدقيقة [20,19]. وقد أثبتت دراسات عديدة، مثل دراسة قاسمي (Ghasemi) وزملائه[18,16] وكذلك دراسة نضال أنكيرا (Nidal Ankira) وزملائه [7]، كفاءة هذه الطريقة عند تطبيقها على الأنظمة المعقدة. كما ساهمت دراسات أخرى في تعزيز هذا التوجه مثل أعمال عباسباندي (S. Abbasbandy) في استخدام طرق بديلة للمقارنة كطريقة تاو [1] وتطبيقاته المباشرة لطريقة التغاير [2] . لذا، سيركز هذا البحث على تطبيق (VIM) لحل نماذج من هذه المعادلات لبيان دقتها في الوصول للحل الدقيق [22,6,8] .

السيرة التاريخية لطريقة التغاير التكراري

ظهرت طريقة التغاير التكراري (VIM) التي طورها العالم الرياضي جي هيون هي (*Ji-Huan He*) عام 1999 [18]، حيث استُخدمت في بدايتها لدراسة معادلة الموجة الخطية، ومعادلة الموجة غير الخطية، والمعادلة الشبيهة بالموجة في نطاقات محدودة وغير محدودة. وقد اثبت العديد من الباحثين موثوقية هذه الطريقة وكفاءتها في مجموعة واسعة من التطبيقات العلمية والفزيائية [19,15] وعلى وجه الخصوص في حل المعادلات التكاملية كما وضّح ذلك الباحث شوهونغ وو (Xu-hong Wu) في دراسته [28]. وتكمن القوة الأساسية لهذه الطريقة في كونها تعطي تقريبات متتالية سريعة التقارب للحل الدقيق، دون الحاجة إلى معاملات صغيرة أو فرضيات مقيدة. وعلى خلاف الطرق التقليدية مثل طريقة التحليل لأدوميان (ADM) [3] أو طريقة هوموتوبي الاضطراب (HPM) [14,12]، فإن طريقة التغاير التكراري (VIM) تتجنب التعقيد الحسابي الناتج عن حساب حدوديات أدوميان كما أشير إليه في [23,19] ، أو الاعتماد على معاملات الاضطراب، مما يقلل من العبء الحسابي خاصة مع ازدياد درجة غير الخطية في المسائل [13,6].

علاوة على ذلك، أثبتت طريقة التغاير التكراري (VIM)، أنها تطوير فعال لطريقة مضاعف لاغرانج العامة [18]، مما منحها القدرة على حل فئة واسعة من المسائل بمرونة عالية. وقد طُبقت بنجاح على المعادلات التفاضلية العادية المستقلة [10,9]،وأنظمة مسائل القيم الحدودية غير الخطية [21,17]، والمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية ذات المعاملات المتغيرة، كما أثبتت الطريقة كفاءة عالية في التعامل مع الأنظمة المعقدة، حيث قدم وزواز (Wazwaz) دراسة شاملة لتطبيق طريقة (VIM) في حل أنظمة المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية [25]، مما ساهم في تقليل الجهد الحسابي وتجاوز عقبات الحدود غير الخطية، وصولاً إلى نماذج معقدة مثل معادلة شرودنجر (Schroedinger) [23] ، ومعادلة KDV المعدّلة ، ومعادلات برغر، ومؤخرًا المعادلات التفاضلية الكسرية ذات تفاضل كابوتو(Caputo) [24]. وقد قدم جي هيون هي (Ji-Huan He) وشوهونغ وو (Xu-hong Wu) مراجعة شاملة لأهم التطورات والتطبيقات الجديدة التي طرأت على الطريقة، مؤكدين على مُرونتها العالية في معالجة المسائل غير الخطية[20] . كما استمر الاهتمام بهذه الطريقة في الأبحاث الحديثة جدًا، حيث استخدمها (Anakira) وزملاؤه لإيجاد الحلول التحليلية الدقيقة لتشمل حل الأنظمة المعقدة من معادلات فولتيرا التكاملية، مما يؤكد بقاء هذه الطريقة كأداة فعالة وموثوقة في الرياضيات التطبيقية المعاصرة [7].

ألية عمل طريقة التغاير التكراري على منظومة معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية

في هذا القسم، سنقوم بتوضيح الفكرة الأساسية لخطوات الحل عند تطبيقها على منظومة من معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية غير الخطية

العامة، ولتعميم الصيغة الفردية غير الخطية (1) التي ذكرناها في المقدمة نفرض أن لدينا منظومة معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية التالية[11,8]:

$$\begin{cases} u_1^{(m)}(x) = H_1\left(x, u_2(x), \dots, u_2^{(m)}(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots, u_n^{(m)}(x)\right) \\ \quad + \int_0^x K_1\left(x, t, u_1(t), \dots, u_1^{(m)}(t), \dots, u_n(t), \dots, u_n^{(m)}(t)\right) dt \\ u_2^{(m)}(x) = H_2\left(x, u_2(x), \dots, u_2^{(m)}(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots, u_n^{(m)}(x)\right) \\ \quad + \int_0^x K_2\left(x, t, u_1(t), \dots, u_1^{(m)}(t), \dots, u_n(t), \dots, u_n^{(m)}(t)\right) dt \\ \quad \vdots \\ u_n^{(m)}(x) = H_n\left(x, u_2(x), \dots, u_2^{(m)}(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots, u_n^{(m)}(x)\right) \\ \quad + \int_0^x K_n\left(x, t, u_1(t), \dots, u_1^{(m)}(t), \dots, u_n(t), \dots, u_n^{(m)}(t)\right) dt \end{cases} \quad (2)$$

في المنظومة السابقة (2)، m هي رتبة المشتقات، والدوال H_i و K_i حيث $(i = 1,2,\cdots,n)$ دوال متصلة في عدة متغيرات تكون معطاة، والدوال $u_i(x)$ حيث $(i = 1,2,\cdots,n)$ دوال مجهولة مطلوب إيجادها.

لحل المنظومة السابقة باستخدام طريقة التغاير التكراري، وللتبسيط، نفرض جميع الحدود ذات تغاير مقيد باستثناء $u_i^{(m)}(x)$ حيث $(i = 1,2,\cdots,n)$. وفقا لطريقة التغاير التكراري، نستنتج دالة التصحيح والتي تُعرف بأنها الصيغة التكرارية الأساسية التي تربط التقريب الحالي بالتقريب المتتالي لتقليص الخطأ تدريجيًا لضمان تقارب الحل نحو الحل الفعلي، وهو ما يتوافق مع الصيغ التكرارية الحديثة المستعرضة في الدراسات المطورة للطريقة [5]. وتكون على الصورة التالية [25,20,18]:

$$\begin{aligned} u_{i,k+1}(x) &= u_{i,k}(x) \\ &+ \int_0^x \lambda_i(\xi)\Big[u_{i,k}^{(m)}(\xi) \\ &- H_i\left(\xi, \tilde{u}_{1,k}(\xi), \cdots, \widetilde{u_{1,k}^{(m)}}(\xi)\right), \cdots, \widetilde{u_{i-1,k}}(\xi), \cdots, \widetilde{u_{i-1,k}^{(m)}}(\xi)\Big), \\ &\quad \widetilde{u_{i+1,k}}(\xi), \cdots, \widetilde{u_{i+1,k}^{(m)}}(\xi)), \cdots, \widetilde{u_{n,k}}(\xi), \cdots, \widetilde{u_{n,k}^{(m)}}(\xi)) \\ &- \int_0^\xi K_i\left(\xi, r, \tilde{u}_{1,k}(r), \cdots, \widetilde{u_{1,k}^{(m)}}(r), \cdots, \widetilde{u_{n,k}}(r), \cdots, \widetilde{u_{n,k}^{(m)}}(r)\right) dr\Big] d\xi \end{aligned} \quad (3)$$

حيث $(i = 1,2,\cdots,n)$، وبجعل التغير التباين لدالة التصحيح السابقة مساويًا للصفر $(\delta u_{i,k+1} = 0)$ ، نتحصل على الشروط التالية [24,17]:

$$1 - (-1)^{m-1}\lambda_i^{(m-1)}\xi|_{\xi=x} = 0$$

$$\lambda_i^{(j)}(\xi)|_{\xi=x} = 0, \ \ j = 1,2,3,\cdots,\mathrm{m}-2, \mathrm{i} = 1,2,3,\cdots,\mathrm{n}$$

$$\lambda_i(\xi)|_{\xi=x} = 0$$

ومن ذلك، يمكن تحديد مُضاعف لاغرانج على النحو التالي [27,18]:

$$\lambda_i(\xi) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(\xi - x)^{m-1}$$

ونتيجة لذلك، نحصل على الصيغ التكرارية التالية[26,21,19]:

$$\begin{aligned} u_{i,k+1}(x) &= u_{i,k}(x) + \int_0^x \lambda_i(\xi) \\ &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(\xi - x)^{m-1}\Big[u_{i,k}^{(m)}(\xi) \\ &- H_i\left(\xi, \tilde{u}_{1,k}(\xi), \cdots, \widetilde{u_{1,k}^{(m)}}(\xi)\right), \cdots, \widetilde{u_{i-1,k}}(\xi), \cdots, \widetilde{u_{i-1,k}^{(m)}}(\xi)\Big), \\ &\quad \widetilde{u_{i+1,k}}(\xi), \cdots, \widetilde{u_{i+1,k}^{(m)}}(\xi)), \cdots, \widetilde{u_{n,k}}(\xi), \cdots, \widetilde{u_{n,k}^{(m)}}(\xi)) \\ &- \int_0^\xi K_i\left(\xi, r, \tilde{u}_{1,k}(r), \cdots, \widetilde{u_{1,k}^{(m)}}(r), \cdots, \widetilde{u_{n,k}}(r), \cdots, \widetilde{u_{n,k}^{(m)}}(r)\right) dr\Big] d\xi. \end{aligned}$$

حيث التقريب الصفري $u_{i,0}$ يتم اختياره وفقا للقيم الابتدائية المعطاة $u_i(0), u_{i,0}(0), \cdots$ ، كما يلي [28,17]

$$u_{i,0}(x) = u_i(0) + u_i'(0) + \frac{1}{2!}u_i''(0) + \cdots$$

وبالتالي حل المنظومة (2) يكون: [11,7]

$$u_i(x) = \lim_{k\to\infty} u_{i,k}(x)$$

الأمثلة التالية توضح كيفية تطبيق طريقة التغاير التكراري (VIM) على المعادلات التكاملية التفاضلية غير الخطية.

الأمثلة العددية

في هذا البند، سيتم تقديم امثلة مختلفة لإظهار الكفاءة والدقة العالية لطريقة التغاير التكراري في حل معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية [27,23,14,11,2,1]. كما سنتطرق لتطبيق ظهارة حدود الضوضاء، والتي تُعرف رياضيًا بأنها تلك الحدود المتطابقة في المقدار والمختلفة في الإشارة التي تظهر ضمن التقريبات التكرارية الأولى، حيث يؤدي تحديدها وحذفها مباشرة إلى تسريع تقارب الحل نحو الحل الدقيق بأقل عدد من التكرارات [4].

مثال1: بفرض منظومة معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية كما يلي [1]:

$$\begin{cases} u'(x) = 1 - \frac{1}{2}v'^2(x) + \int_0^x \left((x-t)v(t) + u(t)v(t)\right) dt \\ v'(x) = 2x + \int_0^x \left((x-t)u(t) - v^2(t) + u^2(t)\right) dt \\ u(0) = 0, v(0) = 1 \end{cases}$$

بتطبيق طريقة التغاير التكراري (VIM) يتم الحصول على دالة التصحيح لهذه المنظومة على الصورة

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) - \int_0^x \Big(u_n'(t) - 1 + \frac{1}{2}v_n'^2(t) + \\ &\quad - \int_0^t \left((t-r)v_n(r) + u_n(r)v_n(r)\right) dr\Big) dt \\ v_{n+1}(x) &= v_n(x) - \int_0^x (v_n'(t) - 2t \\ &\quad - \int_0^t \left((t-r)u_n(r) - v_n^2(r) + u_n^2(r)\right) dr\Big) dt \end{aligned}$$

حيث أن منظومة المعادلات من الرتبة الأولى، فقد تم استخدام $\lambda = -1$. وباستخدام الشرط الابتدائي لاختيار التقريب الصفري $u_0(x) = u(0) = 0$ و $v_0(x) = v(0) = 1$، في دالة التصحيح يتم الحصول على التقريب الأول $u_1(x)$ و $v_1(x)$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_1(x) = -\int_0^x (-1 - \int_0^t (t-r)dr)dt = x + \frac{1}{6}x^3 \\ v_1(x) = 1 - \int_0^x (-2t + \int_0^t dr)dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

وبنفس الكيفية يتم حساب باقي التقريبات

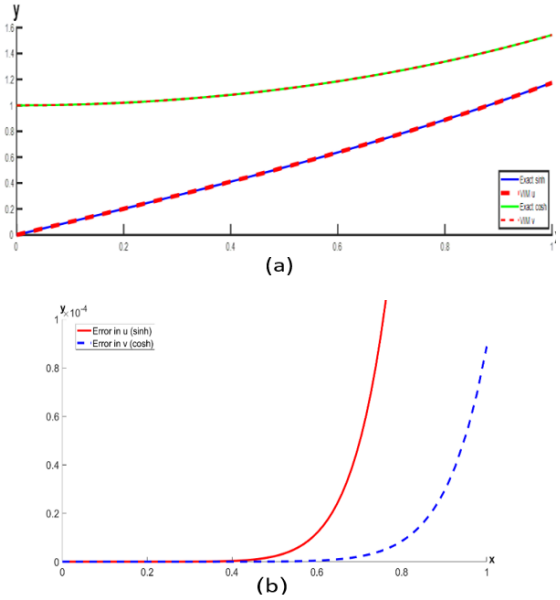
$$\begin{cases} u_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{504}x^7 + \cdots \\ v_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{240}x^6 + \cdots \end{cases},$$

$$\begin{cases} u_3(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{720}x^7 + \cdots \\ v_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots \end{cases},$$

$$\begin{cases} u_4(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \\ v_4(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \end{cases},$$

والمزيد من التقريبات، وبالتالي حسب طريقة التغاير التكراري (VIM) الحل يكون على الصورة

$$\begin{cases} u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \\ v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) \end{cases},$$



شكل 1 : النتائج العددية للمثال 1: (a) مقارنة بين حلول (VIM) والحلول الفعلية، (b) الخطأ المطلق للمنظومة.

وبناء على ذلك، يتم الحصول على الحل في الشكل المغلق

$$\begin{cases} u(x) = \sinh x \\ v(x) = \cosh x \end{cases}$$

لبيان مدى تقارب (VIM) وفاعليتها، جدول 1. يوضح مقدار الخطأ المطلق المترتب على تطبيق الطريقة عند التقريبات الخمسة الأولى مقارنةً بالحل الفعلي في المثال 1.

يوضح الجدول1 والشكل1، النتائج العددية ومقدار الخطأ المطلق الناتج عن تطبيق طريقة التغاير التكراري (VIM) للمنظومة في المثال (2)، حيث يتبين من الجدول (1) أن مقدار الخطأ المطلق يتراوح ما بين 10^{-15} و 10^{-3} عند الفترة المحدودة، مما يعكس بدقة تقارب الحل التقريبي نحو الحل الفعلي. كما يوضح الشكل 1(a) مقارنة للمنحنيات وتطابقها التام، بينما يمثل الشكل 1(b) سلوك الخطأ المطلق الناتج عن تلك المقارنة.

جدول 1: النتائج العددية المتحصل عليها في المثال 1

x	الحل الفعلي		الخطأ المطلق	
	$u(x) = \sinh x$	$v(x) = \cosh x$	$\lvert u - u_i \rvert$	$\lvert v - v_i \rvert$
0	0	1	0	0
0.1	0.10016675	1.00500417	$1.08 \times e^{-15}$	$6.42 \times e^{-12}$
0.2	0.20133600	1.02006676	$5.58 \times e^{-12}$	$6.64 \times e^{-10}$
0.3	0.30452029	1.04533851	$2.17 \times e^{-10}$	$3.89 \times e^{-08}$
0.4	0.41075233	1.08107237	$2.94 \times e^{-09}$	$7.08 \times e^{-07}$
0.5	0.52109531	1.12762597	$2.24 \times e^{-08}$	$6.79 \times e^{-06}$
0.6	0.63665358	1.18546522	$1.19 \times e^{-07}$	$4.36 \times e^{-05}$
0.7	0.75858370	1.25516901	$4.90 \times e^{-06}$	$2.13 \times e^{-05}$
0.8	0.88810598	1.33743495	$1.69 \times e^{-06}$	$8.49 \times e^{-04}$
0.9	1.02651673	1.43308639	$5.09 \times e^{-05}$	$2.91 \times e^{-04}$
1	1.17520119	1.54308063	$1.38 \times e^{-05}$	$8.88 \times e^{-03}$

مثال2: بفرض منظومة معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية التالية[11]:

$$\begin{cases} u''(x) = -2xu'^2(x) + \int_0^x \left(xt^2 \ln u'^2(t) + v''(t)\right) dt \\ v''(x) = 2x + \int_0^x (\ln(v''(t) - u'(t)) + u'(t)v'(t))\, dt \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, v(0) = v'(0) = 0 \end{cases}$$

بتطبيق طريقة التغاير التكراري (VIM) يتم الحصول على دالة التصحيح لهذه المنظومة على الصورة

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (t-x)(u_n''(t) + 2tu_n'^2(t) - \int_0^t \left(tr^2 \ln u_n'^2(r) + v_n''(r)\right) dr \Big) dt$$

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) - \int_0^x (t-x)(v_n''(t) - 2 + t^2 - \int_0^t (\ln(v_n''(r) - u_n'(r)) + u_n'(r)v_n'(r))\, dr \Big) dt$$

حيث أن منظومة المعادلات من الرتبة الثانية، فإن $\lambda = (t-x)$. وبناء على الشروط الابتدائية يتم اختيار التقريب الصفري كما يلي:

$$u_0(x) = u(0) + u'(0)x = x$$
$$v_0(x) = v(0) + v'(0)x = 0$$

وبالتعويض عن التقريب الصفري في دالة التصحيح يتم الحصول على التقريب الأول $u_1(x)$ و $v_1(x)$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_1(x) = x - \frac{1}{3}x^3 \\ v_1(x) = x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^4 \end{cases}$$

وبالتعويض عن التقريبين u_1 و v_1 يتم الحصول على التقريب الثاني

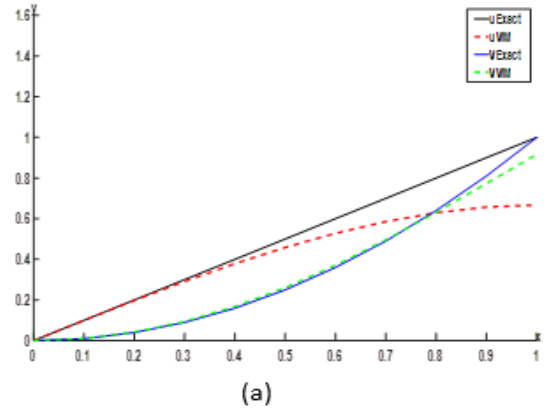
$$\begin{cases} u_2(x) = x + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^3\right) + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^4\right) + \cdots \\ v_2(x) = x^2 + \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^3\right) + \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^4\right) + \cdots \end{cases}$$

وبإلغاء حدود الضوضاء، يتم الحصول على الحل في الشكل المغلق على الصورة

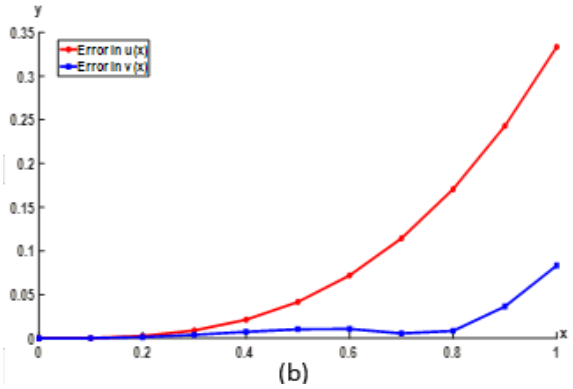
$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = x^2 \end{cases}$$

يوضح الجدول2 والشكل 2 قيم الخطأ المطلق المتحصل عليها في المثال (2). في هذا المثال، تم الاكتفاء بالتعويض في التقريب الأول فقط في لمتسلسلة الحل الناتجة عن تطبيق طريقة التغاير التكراري (VIM) دون اللجوء لإلغاء حدود الضوضاء، وهو ما يفسر التباعد الطفيف الملاحظ في القيم العددية عند أطرف

الفترة مقارنةً بالنتائج المستخرجة في المثال (1) التي اعتمدت على تقريبات أعلى.



(a)



(b)

شكل 2 : النتائج العددية للمثال 2: (a) مقارنة بين حلول (VIM) والحلول الفعلية، (b) الخطأ المطلق للمنظومة.

مثال 3: بفرض منظومة معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية كما يلي[27]:

$$\begin{cases} u'''(x) = -2x - 2x^3 - \frac{2}{5}x^5 + \int_0^x \left(u^2(t) + v^2(t)\right) dt \\ v'''(x) = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \int_0^x (x-t)\left(u^2(t) - v^2(t)\right) dt \\ u(0) = u'(0) = 1, u''(x) = 2, v(0) = -v'(0) = 1, \\ v''(0) = 2 \end{cases}$$

دالة التصحيح لهذه المنظومة

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \frac{1}{2}\int_0^x (t-x)^2 (u_n'''(t) + 2t + 2t^3 + \frac{2}{5}t^5 - \int_0^t \left(u_n^2(r) + v_n^2(r)\right) dr\Big) dt$$

$$v_{n+1}(x) = v_n(x) - \frac{1}{2}\int_0^x (t-x)^2 \Big(v_n'''(t) + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \int_0^t (t-r)\left(u_n^2(r) - v_n^2(r)\right) dr\Big) dt$$

حيث أن منظومة المعادلات من الرتبة الثالثة، فإن $\lambda = -\frac{1}{2!}(t-x)^2$.

وبناء على الشروط الابتدائية يتم اختيار التقريب الصفري كما يلي:

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 + x + x^2 \\ v_0(x) = 1 - x + x^2, \end{cases}$$

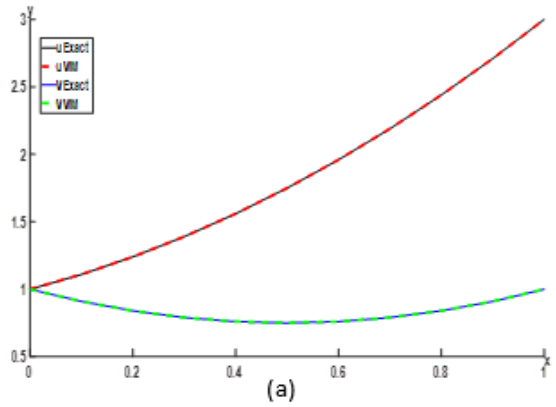
وبالتعويض عن التقريب الصفري في دالة التصحيح يتم الحصول على التقريب الأول $u_1(x)$ و $v_1(x)$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_1(x) = 1 + x + x^2 + (2x^4 - 2x^4) + \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{5}x^5\right) + \cdots \\ v_1(x) = 1 - x + x^2 + \left(\frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{3}x^6\right) + \cdots \end{cases}$$

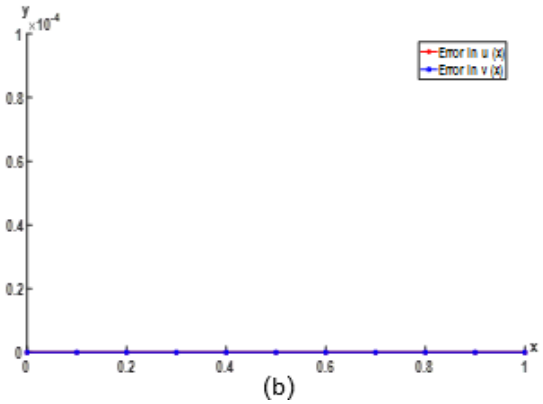
وبإلغاء حدود الضوضاء، يتم الحصول على الحل في الشكل المغلق على الصورة

$$u(x) = 1 + x + x^2, v(x) = 1 - x + x^2$$

يوضح الجدول (3) والشكل (3) قيم الخطأ المطلق الناتج عن تطبيق طريقة التغاير التكراري (VIM) للمنظومة في المثال (3). في هذا المثال، تم التعويض في التقريب الأول فقط لمتسلسلة الحل، وحيث أنه تم إلغاء حدود الضوضاء تمامًا، فقد أدى ذلك إلى الحصول على الحل الدقيق في شكله المغلق مباشرةً منذ التقريب الأول، وهو ما تُظهره قيم الخطأ المطلق الصفرية في الجدول والمنحنيات البيانية.



(a)



(b)

شكل 3 : النتائج العددية للمثال 3: (a) مقارنة بين حلول (VIM) والحلول الفعلية، (b) الخطأ المطلق للمنظومة.

مثال 4: بفرض منظومة معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية كما يلي[27]:

$$\begin{cases} u''(x) = (1-2x)e^x + \int_0^x e^{x-2t}\left(u^2(t) + v(t)\right) dt \\ v''(x) = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \int_0^x \left(e^{x-4t}v^2(t) + e^{x-3t}w(t)\right) dt \\ w''(x) = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \int_0^x \left(e^{x-6t}w^2(t) + e^{x-t}u(t)\right) dt \\ u(0) = u'(0) = 1, v(0) = 1, v'(0) = 2, w(0) = 1, w'(0) = 3 \end{cases}$$

وبالتعويض عن التقريب الصفري في دالة التصحيح يتم الحصول على التقريب الأول كما يلي :

$$u_1(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

$$v_1(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots$$

$$w_1(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + \cdots$$

جدول 2: النتائج العددية المتحصل عليها في المثال 2

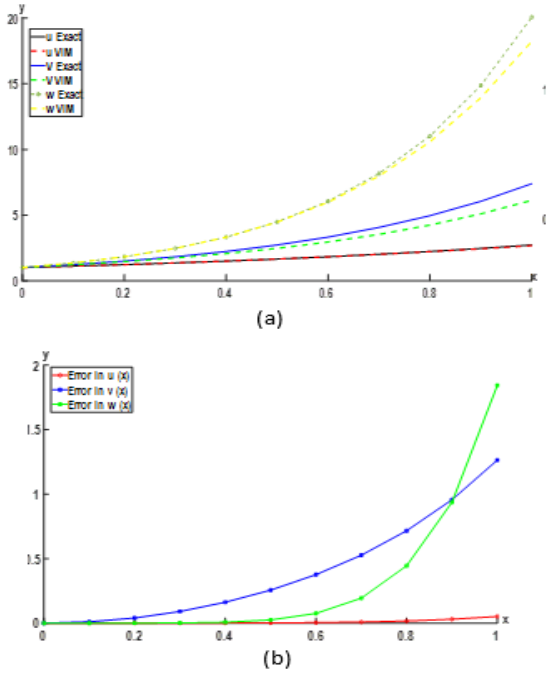
x	الحل الفعلي		الخطأ المطلق	
	$u(x) = x$	$v(x) = x^2$	$\|u - u_i\|$	$\|v - v_i\|$
0	0	0	0	0
0.1	0.1	0.01	$3.00 \times e^{-4}$	$2.17 \times e^{-04}$
0.2	0.2	0.04	$2.70 \times e^{-03}$	$1.47 \times e^{-03}$
0.3	0.3	0.09	$9.00 \times e^{-03}$	$4.05 \times e^{-03}$
0.4	0.4	0.16	$2.13 \times e^{-02}$	$7.47 \times e^{-03}$
0.5	0.5	0.25	$4.17 \times e^{-02}$	$1.04 \times e^{-02}$
0.6	0.6	0.36	$7.20 \times e^{-02}$	$1.08 \times e^{-02}$
0.7	0.7	0.49	$1.14 \times e^{-01}$	$5.72 \times e^{-03}$
0.8	0.8	0.64	$1.71 \times e^{-01}$	$8.53 \times e^{-03}$
0.9	0.9	0.81	$2.34 \times e^{-01}$	$3.65 \times e^{-02}$
1	1.0	1.00	$3.33 \times e^{-01}$	$8.33 \times e^{-02}$

جدول 3: النتائج العددية المتحصل عليها في المثال 3

x	الحل الفعلي		الخطأ المطلق	
	$u(x) = 1 + x + x^2$	$v(x) = 1 - x + x^2$	$\|u - u_i\|$	$\|v - v_i\|$
0	1.00	1.00	0	0
0.1	1.11	0.91	0	0
0.2	1.24	0.84	0	0
0.3	1.39	0.79	0	0
0.4	1.56	0.76	0	0
0.5	1.75	0.75	0	0
0.6	1.96	0.76	0	0
0.7	2.19	0.79	0	0
0.8	2.44	0.84	0	0
0.9	2.71	0.91	0	0
1	3.00	1.00	0	0

بالتالي الحل في الشكل المغلق يكون على الصورة

$$u(x) = e^x$$
$$v(x) = e^{2x}$$
$$w(x) = e^{3x}$$



شكل 4 : النتائج العددية للمثال 4: (a) مقارنة بين حلول (VIM) والحلول الفعلية، (b) الخطأ المطلق للمنظومة.

يوضح الجدول (4) والشكل (4) النتائج العددية وقيم الخطأ المطلق المترتبة على تطبيق طريقة التغاير التكراري في المثال (4). حيث تم الاكتفاء بحساب المتسلسلة عند التقريب الأول فقط لبيان مدى دقة الطريقة وسلوك الخطأ المتبقي الناتجة عنها عند هذا المستوى من التقريب دون الحاجة لحساب رتب أعلى.

مثال5: بفرض منظومة معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية التالية [27].

$$\begin{cases} u''(x) = \frac{5}{3}\sin x + \frac{2}{3}\sin(2x) - 4x \\ \quad + \int_0^x \cos(x-t)\left(u^2(t) + v^2(t)\right)dt \\ v''(x) = (1-x)\sin x + x^2\cos x \\ \quad + \int_0^x \sin(x-t)\left(u^2(t) - v^2(t)\right)dt \\ u(0) = 0, u'(0) = 2, v(0) = v'(0) = 0 \end{cases}$$

ونختار التقريبين الصفريين $u_0(x) = 2x$ و $v_0(x) = 0$. وتباعاً للأمثلة السابقة، نتحصل على التقريبات التالية:

$$\begin{cases} u_0(x) = 2x \\ v_0(x) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} u_1(x) = 2x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{336}x^7 - \frac{1}{4536}x^9 + \cdots \\ v_1(x) = \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{2520}x^8 - \frac{1}{9!}x^9 + \cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2(x) = 2x - \frac{1}{6!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{4536}x^9 - \cdots \\ v_2(x) = \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{1260}x^7 - \frac{1}{9!}x^9 + \cdots \end{cases}$$

وبالتالي، الحل في الشكل المغلق يكون على الصورة

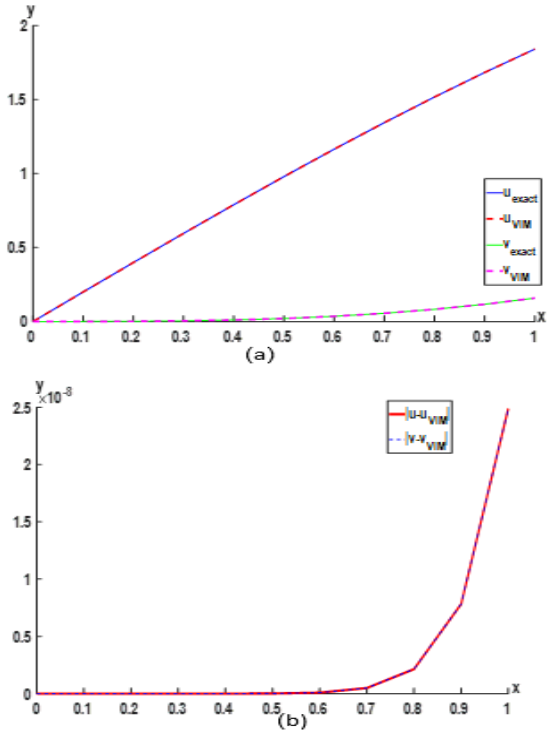
$$u(x) = x + \sin x$$
$$v(x) = x - \sin x$$

جدول 4: النتائج العددية المتحصل عليها في المثال 4

x	الحل الفعلي			الخطأ المطلق		
	$u(x) = e^x$	$v(x) = e^{2x}$	$w(x) = e^{3x}$	$\|u - u_i\|$	$\|v - v_i\|$	$\|w - w_i\|$
0	1.00	1.00	1.00	0	0	0
0.1	1.11	1.22	1.35	$5.01 \times e^{-07}$	$1.00 \times e^{-02}$	$2.64 \times e^{-06}$
0.2	1.22	1.49	1.82	$1.61 \times e^{-05}$	$4.01 \times e^{-02}$	$1.21 \times e^{-04}$
0.3	1.35	1.82	2.46	$1.23 \times e^{-04}$	$9.04 \times e^{-02}$	$1.23 \times e^{-03}$
0.4	1.49	2.23	3.32	$5.18 \times e^{-04}$	$1.62 \times e^{-01}$	$6.60 \times e^{-03}$
0.5	1.65	2.72	4.48	$1.59 \times e^{-03}$	$2.56 \times e^{-01}$	$2.49 \times e^{-02}$
0.6	1.82	3.32	6.05	$3.96 \times e^{-03}$	$3.76 \times e^{-01}$	$7.51 \times e^{-02}$
0.7	2.01	4.06	8.17	$8.58 \times e^{-03}$	$5.27 \times e^{-01}$	$1.94 \times e^{-01}$
0.8	2.23	4.95	1.10	$1.68 \times e^{-02}$	$7.16 \times e^{-01}$	$4.45 \times e^{-01}$
0.9	2.46	6.05	1.49	$3.04 \times e^{-02}$	$9.56 \times e^{-1}$	$9.38 \times e^{-01}$
1	2.72	7.39	2.01	$5.16 \times e^{-02}$	$12.6 \times e^{-01}$	$18.4 \times e^{-1}$

جدول 5: النتائج العددية المتحصل عليها في المثال5

x	الحل الفعلي		الخطأ المطلق	
	$u(x) = x + \sin x$	$v(x) = x - \sin x$	$\|u - u_i\|$	$\|v - v_i\|$
0	0	0	0	0
0.1	$2.00 \times e^{-01}$	$1.67 \times e^{-04}$	0	$3.31 \times e^{-18}$
0.2	$3.99 \times e^{-01}$	$1.33 \times e^{-03}$	$5.00 \times e^{-16}$	$5.23 \times e^{-16}$
0.3	$5.96 \times e^{-01}$	$4.48 \times e^{-03}$	$4.44 \times e^{-14}$	$4.44 \times e^{-14}$
0.4	$7.89 \times e^{-01}$	$1.06 \times e^{-02}$	$1.05 \times e^{-12}$	$1.05 \times e^{-12}$
0.5	$9.79 \times e^{-01}$	$2.06 \times e^{-02}$	$1.22 \times e^{-11}$	$1.22 \times e^{-11}$
0.6	$1.16 \times e^{+00}$	$3.54 \times e^{-02}$	$9.07 \times e^{-11}$	$9.07 \times e^{-11}$
0.7	$1.34 \times e^{+00}$	$5.58 \times e^{-02}$	$4.94 \times e^{-10}$	$4.94 \times e^{-10}$
0.8	$1.52 \times e^{+00}$	$8.26 \times e^{+00}$	$2.14 \times e^{-09}$	$2.14 \times e^{-09}$
0.9	$1.68 \times e^{+00}$	$1.17 \times e^{+00}$	$7.82 \times e^{-09}$	$7.82 \times e^{-09}$
1.0	$1.84 \times e^{+00}$	$1.59 \times e^{+00}$	$2.49 \times e^{-08}$	$2.49 \times e^{-08}$



شكل 5 : النتائج العددية للمثال 5: (a) مقارنة بين حلول (VIM) والحلول الفعلية، (b) الخطأ المطلق للمنظومة.

توضح النتائج العددية في الجدول (5) والشكل (5)، الدقة والكفاءة العالية لطريقة التغاير التكراري (VIM) في حل هذه المنظومة. كما يظهر الشكل 5(a) تطابقا تاما بين الحلول التقريبية والحلول الفعلية على الفترة $[0,1]$. وفي السياق ذاته، يوضح شكل 5(b) الخطأ المطلق للمتغيرين $u(x)$ و$v(x)$ حيث يتبين أن أقصى قيمة للخطأ عند نهاية الفترة لا تتعدى 2.49×10^{-8}، مما يؤكد الدقة العالية والتقارب السريع للطريقة.

الاستنتاج

في هذه الورقة، طبقنا طريقة التغاير التكراري (VIM) لحل أنظمة معادلات فولتيرا التكاملية التفاضلية غير الخطية. ومن خلال مقارنة النتائج العددية المحصل عليها بالحل الفعلي، أثبتت الدراسة أن هذه الطريقة تتميز بدقة عالية وسرعة فائقة في التقارب نحو الحل الدقيق. وتكمن أهمية طريقة (VIM) في كونها لا تتطلب إجراء عمليات تجميد للمؤثرات أو استخدام معاملات صغيرة، مما يحرر الحسابات من قيود الاضطراب التقليدية ويجعلها بسيطة ومباشرة. وبناءً على النتائج التي تم عرضها في الأمثلة السابقة، نلخص إلى أن هذه الطريقة تعد أداة فعالة وقوية جدًا في معالجة الأنظمة المعقدة من المعادلات التفاضلية والتكاملية غير الخطية بدقة وكفاءة عالية.

المراجع

1. S. Abbasbandy and A. Taati, Numerical solution of the system of nonlinear Volterra integro-differential equations with nonlinear differential part by the operational Tau method and error estimation, J. Comput. Appl. Math., 231, 106-113 (2009).

2. S. Abbasbandy and E. Shivanian, Application of the Variational Iteration Method to Nonlinear Volterra's Integro-Differential Equations, Z. Naturforsch., 63a, 538-542 (2008).

3. G. Adomian and R. Rach*, Numerical solution* of nonlinear boundary value problems, Appl. Math. Comput. 50, 9-19 (1992).

4. G. Adomian, and R. Rach, Noise terms in decomposition series solution, Computers Math. Appl., 24 (11), (1992) 61-64.

5. H. Ahmed, W. Adel, and S. Yao, Numerical study of fractional-order Volterra integro-differential equations using a modified variational iteration method, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 39 (2) (2023), 1420-1435.

6. S. Alao, F.S. Akinboro, F.O. Akinpelu and R.A. Oderinu, Numerical solution of integro-differential equation using Adomian decomposition and variational iteration methods, IOSR-JM,10 (4), 18-22 (2014).

7. N. Anakira, et al., Analytical approaches for computing exact solutions to system of Volterra integro-differential equations, WSEAS Trans. Math., 23 (2024).

8. *S. N. Ananna and A. Al Mamun,* Solution of Voltarra's Integro-Differential Equations by Using Variational Iteration Method, International Journal of Scientific and Engineering Research, 11 (3) (2020), 1-9.

9. B. Batiha, M.S.M. Noorani and I. Hashim, Variational iteration method for solving multispecies Lotka-Volterra equations, Comput. Math., 54, 903-909 (2007).

10. J. Biazar and H. Aminikhah, Study of convergence of He's variational iteration method for systems of integral equations, Comput. Math., 55, 2249-2256 (2008).

11. J. Biazar, H. Ghazvini, and M. Eslami, He's homotopy perturbation method for system of integro-differential equations, Chaos Solitons Fractals, 39(3), 1253-1258 (2009).

12. J. Biazar, H. Ghazvini, He's homotopy perturbation method for solving system of Volterra integral equations of the second kind, Chaos Solitons Fractals. 39(2), 770-777 (2009).

13. S. Davaeifar and J. Rashidinia, Approximate solution of system of nonlinear Volterra integro-differential *equations* by using Berntein collocation method, Int. J. Math. Model. Comput., 7 (1), 79-91 (2017).

14. M. El-Shahed, Application of He's homotopy perturbation method to Volterra's integro-differential equation, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 6(2), 163-168 (2005).

15. D.D. Ganji, H. Tari and M.B. Jooybari, Variational iteration method and homotopy perturbation method for nonlinear evolution equations, Comput. Math. Appl., 54, 1018-1027 (2007).

16. M. Ghasemi, M.T. Kajani and E. Babolian, Numerical solution of the nonlinear systems of Volterra integral equations by the variational iteration method, Appl. Math. Comput., 188, 446-449 (2007).

17. M. Ghasemi, M.T. Kajani*, Numerical* solution of the system of second-order boundary value problems by the variational iteration method, Appl. Math. Comput., 188, 145-149 (2007).

18. J.H. He, Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: some examples, Int. J. Nonlinear Mech., 34, 699-708 (1999).

19. J.H. He, Non-perturbative methods for strongly nonlinear problems, Dissertation.de-Verlag im Internet GmbH, Berlin (2006).

20. J.H. He and X.H. Wu, Variational iteration method: New development and applications, Comput. Math. Appl., 54, 881-894 (2007).

21. J. Lu, Variational iteration method for solving a nonlinear system of second-order boundary value problems*,* Comput. Math. Appl., 54, 881-894 (2007).

22. J.I. Ramos, Iterative and non-iterative methods for non-linear Volterra integro-differential equations, Appl. Math. Comput., 188, 145-149 (2007).

23. N.H. Sweilam and R.F. Al-Bar, Variational iteration method for coupled nonlinear Schroedinger equations, Comput. Math. Appl., 54, 993-999 (2007).

24. S.Q. Wang and J.H. He, Variational iteration method for solving integro-differential equation, Phys. Lett. A, 367,188-191 (2007).

25. A.M. Wazwaz, The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of PDEs, Comput. Math. Appl., 54, 895-902 (2007).

26. A.M. Wazwaz, A First Course in Integral Equations, World Scientific Publishing. Co. Pte. Ltd, (2015).

27. A.M.Wazwas, Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications, Springer Heidelberg, Dordrecht London, (2011).

28. L. Xu, Variational iteration method for solving integral equations, Comput. Math. Appl., 54, 1071-1078 (2007).

29. X.W. Zhou, Variational theory for physiological flow, Comput. Math. Appl., 54, 1000-1002 (2007).