هوموتوبي الاضطراب التغايرية (VHPM) لحل معادلات كيرتويج دي-فرايس (KdV) غير الخطية في بعد واحد وبعدين

فاطمة التهامي نوح زقوط [1]، ايمان محمد اشتيوي[2]

1-قسم الرياضيات-كلية العلوم-جامعة مصراته
2-قسم الرياضيات – مدرسة العلوم الأساسية -الاكاديمية الليبية -مصراته

Electronic publishing data: 28.2.2024

الملـــــخص: تتناول هذه الدراسة تطبيق طريقة هوموتوبي الاضطراب التغايرية (VHPM) لحل فئة من معادلات كيرتويج دي-فرايس غير الخطية في بعد واحد وبعدين. هذه الطريقة التقريبية هي في الواقع اقتران لطريقتي هوموتوبي الاضطراب الكلاسيكية (HPM) وطريقة التكرارات التغايرية (VIM). خلال هذه الدراسة تم تطبيق طريقة هوموتوبي الاضطراب التغايرية على مسائل كيرتويج دي فرايس مع شروط ابتدائية. النتائج المتحصل عليها أظهرت سهولة في التطبيق وفعالية عالية في الحل. إذا كان الحل الفعلي للمسألة موجودا، فإن متسلسلات القوى اللانهائية المتحصل عليها والممثلة للحل تتقارب سريعا وبدقة عالية الي الحل بأقل عدد ممكن من التكرارات. الحلول المتحصل عليها تم تمثيلها بيانيا وتأكيدها باستخدام MATLAB 14 .

الكلمات المفتاحية:
طريقة هوموتوبي الاضطراب التغايرية (VHPM)، معادلات كيرتويج-دي فرايس (KdV)، المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.

المقـــــدمة:

تعتبر المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية نموذج رياضي لتمثيل العديد من الظواهر الفيزيائية في عالمنا المعاصر. اذ تظهر هذه المعادلات في كثير من تطبيقات الظواهر الخطية غير الخطية الهامة الموصوفة بهذه المعادلات مثل ميكانيكا الكم وميكانيكا الموائع والكهرباء وغيرها. وخلال الأعوام الماضية تم استثمار قدر كبير من العمل البحثي لدراسة هذا النوع من المعادلات ذات المسائل الخطية وغير الخطية في التطبيقات العملية حيث تم تطبيق عدة طرق لإيجاد حل هذه المعادلات من بينها طريقة التغاير التكرارية (VIM) وطريقة هوموتوبي الاضطراب (HPM) وهناك طرق أخرى مبنية على دمج الطريقتين معا (Noor & Mohyud-Din,2008). تعد هذه الطرق حالات خاصة من طريقة هوموتوبي الاضطراب التحليلية كما أنها تزودنا بطريقة سهلة للتعديل والسيطرة على تقارب سلسلة الحل من خلال التحكم بقيمة الخطأ (إبراهيم. محمود،2018). إضافة الي ذلك، تم تطبيق طريقة هوموتوبي الاضطراب التغايرية VHPM لأبعاد أعلى من مسائل القيم الابتدائية، استخدمت هذه التقنية لحل معادلة Kdv (Korteweg-de vries) والتي استنتجت في دراسة موجات الماء الطويلة عام 1895، وهي معادلة أدت إلى حلول الموجة المنعزلة، والتي هي عبارة عن موجات ناشئة كنتيجة للتوازن بين الحمل الحراري غير الخطي والتشتت الخطي في هذه المعادلات (Kelil & Appadu, 2022).

في هذه الورقة سنقوم بإيجاد الحلول التقريبية لمعادلات كيرتويج دي فرايس في بعد واحد وبعدين باستخدام طريقة هوموتوبي الاضطراب التغايرية (VHPM). هذه الطريقة لديها ميزة كبيرة تتمثل في كونها تعطي حل تقريبي بأقل عدد من التكرارات لمدى واسع من المعادلات غير الخطية في العلوم التطبيقية واضافة الي كونها لا تحتاج إلى حل معادلة تفاضلية لكل تكرار على عكس غيرها من غالبية الطرق العددية وبعتمد تقارب هذه الطريقة على تقارب طريقة التكرار التغايري VIM.

مفهوم الهوموتوبي :

هو مفهوم أساسي في التبولوجيا والهندسة التفاضلية، يعود للعالم الفرنسي Jules Henri Poincare ويعرف الهوموتوبي بين دالتين مستمرتين f و g من فضاء تبولوجي X الي فضاء تبولوجي Yعلي أنه الدالة المستمرة

$$H: X \times [0,1] \rightarrow Y$$

بحيث يحقق أنه إذا كان

$$x \in X, \qquad H(x,0) = f(x), \;\; H(x,1) = g(x)$$

فأن الهوموتوبي يأخذ الصيغة التالية:

$$H(x,p) = (1-p)f(x) + pg(x),$$
$$0 \leq p \leq 1.$$

(Y=R هنا في هذا البحث).(M. A. NOOR, 2008)

تقارب طريقة التكرار التغايرية (VIM) :

كما هو موضح في (M. E, Zayed, 2010) فأن تحليل التقارب للطريقة سيتم تناوله بصورة عامة للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية. هنا، يتم فرض فضاء بناخ بحيث

$$u: Q \rightarrow R$$

مع

$$\int_Q u^2 \;\, dx \;\; < \infty ,$$

حيث النظيم المناظر المرتبط به يعطي بـ

$\|u\|^2 = \int_Q u^2 dx$. تقارب طريقة VIM يكون متحققا اذا تحققت شروط النظرية التالية:

نظرية 1: (نظرية النقطة الثابتة لبناخ):

بفرض X فضاء **بناخ و** $A: X \rightarrow X$ راسم غير خطي، وأن $\| \leq \gamma \|u - \tilde{u}\|$. عندئذ A يكون له نقطة ثابتة وحيدة. علاوة علي ذلك، المتسلسلة u_{n+1} =A$[u_n]$ مع اختيار عشوائي لـ $u_0 \in X$ تتقارب الي النقطة الثابتة لـ A

$$\|u_k - u_l\| \leq \|u_1 - u_0\| \sum_{j=l-1}^{k-2} \gamma^j$$

وفقا للنظرية (1) بالنسبة للراسم غير الخطي A فأن

$$A[u] = u(x,t) + \int_0^t \lambda \, F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial \tau}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \tau}\right) dx \qquad (8)$$

,

الشرط الكافي لتقارب الطريقة هو الانكماش الصارم لـ A بحيث انه لكل $u, \tilde{u} \in$ X فأن

$\|\tilde{u}\| \leq M$ و $\|u\| \leq M$ ،$M > 0,$

علاوة على ذلك، المتسلسلة (8) تتقارب الي النقطة الثابتة لـ A والتي هي أيضا الحل للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة.

ألية عمل طريقة هوموتوبي الاضطراب التغايرية (VHPM):

لتوضيح كيفية تطبيق طريقة VHPM، لنفرض أن لدينا المعادلة التفاضلية غير الخطية التالية:

$$L(u(x,t)) + N(u(x,t)) = g(x,t)$$

حيث L, N مؤثران أحدهما خطي والآخر غير خطي على التوالي، وأن $g(t)$ هي دالة تحليلية معلومة (A. Bouhassoun et al,2013).

حسب طريقة VIM، تكتب الدالية التصحيحية:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \lambda \int_0^t (x,s)\{Lu_n(x,s) + R\tilde{u}_n(x,s) + N\tilde{u}_n(x,s) - g(s)\}ds$$

حيث λ يسمى مضروب لاجرانج العام والذي يمكن إيجاده على النحو الأمثل بواسطة نظرية التغاير variation theory ، u_n هو التقدير الذي ترتيبه n للحل و $\tilde{u}_n$ يرمز للتباين المقيد، أي أن $\delta\tilde{u}_n = 0$ (Zayed & Abdel Rahman,2013).

الآن باستخدام طريقة هوموتوبي الاضطراب نستطيع بناء المعادلة كالتالي:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P^i u_i = u_0(x) + p\int_0^t \lambda(x,s)\{Lu_n(x,s) + N\tilde{u}_n(x,s) - g(s)\}ds \quad \rightarrow (9)$$

وبمساواة الحدود بالقوى المطابقة لـ P وأخذ النهاية عندما P تؤول إلى 1 نحصل على

$$u(x,t) = \lim_{p\to 1} \sum_{i=0}^{\infty} P^i\, u_i(x,t)$$

معادلة كيرتويج دي - فرايس (KdV):

هي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية من الدرجة الثالثة تنشا في دراسة عدد من الأنظمة الفيزيائية المختلفة، مثل موجات الماء وفيزياء البلازما والشبكات غير التوافقية والقضبان المرنة، فهي تستخدم لوصف الموجات الطويلة المدى التي تنتقل في القنوات ذات السعة الصغيرة ولكن المحدودة. تم استخدام العديد من التقنيات العددية والتحليلية بدراسة الموجات المنفردة الناتجة عن هذه المعادلة وحلولها (Miura,1976).

هذه المعادلة تأخذ الصورة العامة المتجانسة البسيطة في بعد واحد:

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0\ , \qquad u(x,0) = f(x)$$

وفي بعدين تأخذ الصورة العامة:

$$u_t + auu_x + buu_y + cu_{xxx} + du_{yyy} = 0$$
$$u(x,y,0) = f(x,y).$$

ثوابت a, b, c,d.

الأمثلة العددية

مثال (1):

أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية (Wazwaz,2009):

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0\ ,\quad 0 < x < 5$$
$$0 < t < 1$$

$$u(x,0) = \frac{x-2}{12}$$

الحل الفعلي للمسألة هو:

$$u(x,t) = \frac{x-2}{6(2-t)}.$$

الحل: بتطبيق دالية التصحيح على المعادلة المعطاة:

$$u_{n+1} = u_n + p\int_0^t \lambda(\tau)\{(u_n)_t - 6\tilde{u}_n(\tilde{u}_n)_x + (\tilde{u}_n)_{xxx}\}d\tau$$

حيث مضروب لاجرانج العام $\lambda(\tau) = -1$ وبفرض أن الحل على الصورة:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots \qquad \rightarrow (1)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P^i u_i = u_0(x) - p\int_0^t \left\{(u_0)_t - 6\sum_{i=0}^{\infty} P^i u_i (u_n)_x + \sum_{i=0}^{\infty} P^i (u_n)_{xxx}\right\} d\tau \quad \rightarrow (2)$$

بالتعويض بالمعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على:

$$u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots = \frac{x-2}{12} + p\int_0^t 6(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)_x d\tau - p\int_0^t (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)_{xxx} d\tau$$

$$= \frac{x-2}{12} + p\int_0^t [(6u_0(u_0)_x + 6pu_0(u_1)_x + 6p^2u_0(u_2)_x + \cdots) + (6pu_1(u_0)_x + 6p^2u_1(u_1)_x + 6p^3u_1(u_2)_x + \cdots) + (6p^2u_2(u_0)_x + 6p^3u_2(u_1)_x + 6p^4u_2(u_2)_x + \cdots)]d\tau - p\int_0^t p(u_0)_{xxx} + p^2(u_1)_{xxx} + p^3(u_2)_{xxx} + \cdots)\ \ d\tau$$

وبمقارنة معاملات متسلسلة القوى p من الطرفين:

$$p^0:\ \ u_0(x) = \frac{x-2}{12}$$

$$p^1: \qquad u_1(x,t) = 6\int_0^t u_0(u_0)_x d\tau - \int_0^t (u_0)_{xxx} d\tau$$
$$= 6\int_0^t (\frac{x-2}{12})(\frac{1}{12})d\tau - \int_0^t 0 d\tau$$
$$= \frac{x-2}{24}t$$

$$p^2: \quad u_2(x,t) = 6\int_0^t \left(u_0(u_1)_x + u_1(u_0)_x\right)d\tau - \int_0^t (u_1)_{xxx}d\tau$$
$$= 6\int_0^t \left[\left(\frac{x-2}{12}\right)\left(\frac{1}{24}\right)\tau + \left(\frac{x-2}{24}\right)\left(\frac{1}{12}\right)\tau\right]d\tau = \frac{x-2}{48}t^2$$

$$p^3: \; u_3(x,t) = 6\int_0^t \left(u_0(u_2)_x + u_1(u_1)_x + u_2(u_0)_x\right)d\tau - \int_0^t (u_2)_{xxx}d\tau$$
$$= 6\int_0^t \left[\left(\frac{x-2}{12}\right)\left(\frac{1}{48}\right)\tau^2 + \left(\frac{x-2}{24}\right)\tau\left(\frac{1}{24}\right)\tau + \left(\frac{x-2}{48}\right)\left(\frac{1}{12}\right)\tau^2\right]d\tau = \frac{x-2}{96}t^3$$

وهكذا بتكرار العملية لباقي التكرارات نحصل علي.

$$u_4(x,t) = \left(\frac{x-2}{12}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^4, \qquad u_5(x,t) = \left(\frac{x-2}{12}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^5,$$

$$u_6(x,t) = \left(\frac{x-2}{12}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^6$$

عندما $p \to 1$ في المعادلة (1) فإن:

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

وبالتالي نحصل على الحل في صورة المتسلسلة التالية:

$$u(x,t) = \frac{x-2}{12} + \frac{x-2}{24}t + \frac{x-2}{48}t^2 + \frac{x-2}{96}t^3 + \frac{x-2}{192}t^4 + \cdots$$

ويمكن كتابتها بعد 5 تكرارات في صورة:

$$u(x,t) = \left(\frac{x-2}{12}\right)\left[1 + \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^3 + \left(\frac{t}{2}\right)^4 + \left(\frac{t}{2}\right)^5\right]$$

والتي تتقارب إلى الحل في الصورة المغلقة:

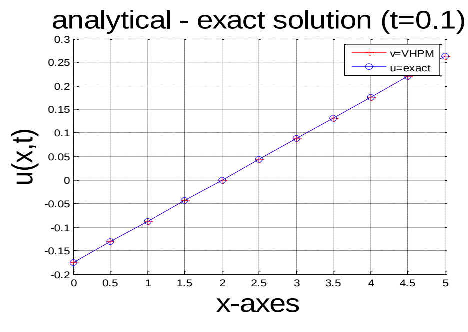
$$u(x,t) = \frac{x-2}{6(2-t)}.$$

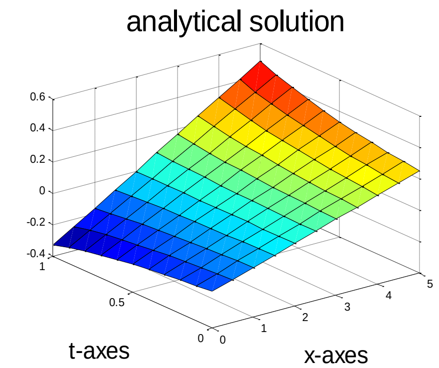
لبيان مدى تقارب VHPMوفاعليتها، الجدول التالي يتضمن مقارنة الحل الفعلي بالحل المتحصل عليه من تطبيق VHPM عند 5 تكرارات فقط ولأزمنة مختلفة مع $\Delta x = 0.5$:

	t=0.01		
x	**الحل الفعلي**	**حل VHPM**	**الخطأ المطلق**
0.5	-0.12562814070352	-0.125628140703516	$1.99840144 \times e^{-15}$
1	-0.08375209380235	-0.083752093802344	$1.33226763 \times e^{-15}$
1.5	-0.04187604690117	-0.041876046901172	$6.66133815 \times e^{-16}$
2	0	0	0
2.5	0.041876046901173	0.041876046901172	$6.66133815 \times e^{-16}$
3	0.083752093802345	0.083752093802344	$1.33226763 \times e^{-15}$
3.5	0.125628140703518	0.125628140703516	$1.9984014 \times e^{-15}$
4	0.167504187604690	0.167504187604687	$2.66453526 \times e^{-15}$
4.5	0.209380234505863	0.209380234505859	$3.30291350 \times e^{-15}$
5	0.251256281407035	0.25125628140701	$3.9968029 \times e^{-15}$
	t=0.1		
0.5	-0.1315789473684	-0.131578945312500	$2.05592107 \times e^{-9}$
1	-0.0877192982456	-0.087719296875000	$1.370614053 \times e^{-9}$
1.5	-0.04385964912281	-0.043859648437500	$6.85307026 \times e^{-10}$
2	0	0	0
2.5	0.043859649122807	0.043859648437500	$6.85307026 \times e^{-10}$
3	0.087719298245614	0.087719296875000	$1.370614053 \times e^{-9}$
3.5	0.131578947368421	0.131578945312500	$2.05592107 \times e^{-9}$
4	0.175438596491228	0.175438593750000	$2.741228106 \times e^{-9}$
4.5	0.219298245614035	0.219298242187500	$3.42653508\text{e} \times e^{-9}$
5	0.263157894736842	0.263157890625000	$4.111842145 \times e^{-9}$

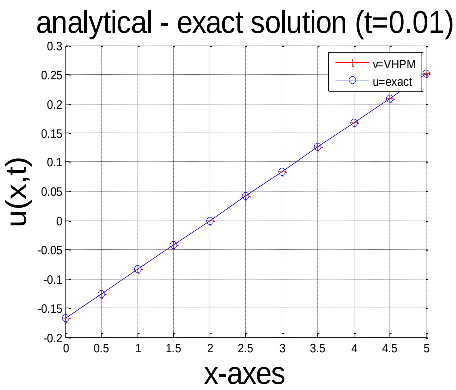
نلاحظ الحصول علي دقة عالية كلما صغرت قيمة t وبأقل عدد من التكرارات. حيث تم الحصول على 7 ارقام معنوية عند $t=0.1$ و13 رقم معنوي عند $t=0.01$.

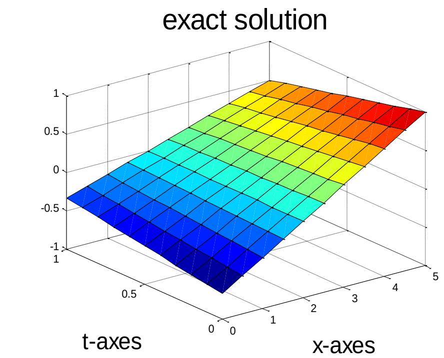
الأشكال التالية توضح تمثيل الحل المتحصل عليه من VHPM والحل الفعلي لسبعة تكرارات عند $t = 0.01$ و $t = 0.1$.



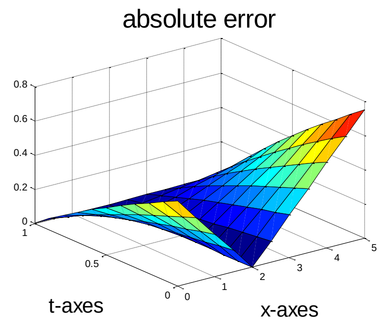


الحل التقريبي لكل $0 < x < 5$ و $\Delta t = 0.1$, $0 \le t < 1$





الحل التقريبي لكل $0 < x < 5$ و $\Delta t = 0.1$, $0 \le t < 1$



الحل التقريبي لكل $0 < x < 5$ و
$\Delta t = 0.1, 0 \le t < 1$

مثال (2): أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية Yesim & (Emrullah,2021):

$$u_t - 6u_x u + 6u_y u - u_{xxx} + u_{yyy} + 3u_{xxy} - 3u_{xyy} = 0 \quad ,$$

$$0 < x, y < 5 \quad , \quad 0 < t < 1$$

$$u(x, y, 0) = (2x + y)$$

الحل الفعلي للمسألة هو:

$$u(x, y, t) = \frac{(2x + y)}{(1 - 6t)}.$$

الحل: بتطبيق دالية التصحيح على المعادلة المعطاة:

$$u_{n+1} = u_n + p\int_0^t \lambda(\tau)\{(u_n)_t - 6(\tilde{u}_n)_x\tilde{u}_n + 6(\tilde{u}_n)_y\tilde{u}_n - (\tilde{u}_n)_{xxx} + (\tilde{u}_n)_{yyy} + 3(\tilde{u}_n)_{xxy} - 3(\tilde{u}_n)_{xyy}\}d\tau$$

حيث مضروب لاجرانج العام $\lambda(\tau) = -1$ وبفرض أن الحل على الصورة:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots \qquad \to (1)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P^i u_i = u_0(x, y) - p\int_0^t \Bigg\{(u_0)_t - 6\sum_{i=0}^{\infty} P^i (u_n)_x \sum_{i=0}^{\infty} P^i u_i + 6\sum_{i=0}^{\infty} P^i (u_n)_y \sum_{i=0}^{\infty} P^i u_i - \sum_{i=0}^{\infty} P^i (u_n)_{xxx} + \sum_{i=0}^{\infty} P^i (u_n)_{yyy} + 3\sum_{i=0}^{\infty} P^i (u_n)_{xxy} - 3\sum_{i=0}^{\infty} P^i (u_n)_{xyy}\Bigg\} d\tau \to (2)$$

بالتعويض بالمعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على:

$$u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots = (2x + y) - p\int_0^t -6(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)_x(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots) + 6(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)_y(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots) - (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)_{xxx} + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)_{yyy} + 3(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)_{xxy} - 3(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)_{xyy} d\tau$$

بمقارنة معاملات متسلسلة القوى p من الطرفين:

$$p^0: \quad u_0(x, y) = (2x + y)$$

$$p^1: \quad u_1(x, y, t) = \int_0^t \left[6(u_0)_x u_0 - 6(u_0)_y u_0 + (u_0)_{xxx} - (u_0)_{yyy} - 3(u_0)_{xyy} + 3(u_0)_{xxy}\right] d\tau$$

$$= 6(2x + y)t$$

$$p^2: \quad u_2(x,y,t) = \int_0^t \Big[6(u_0)_x u_1 + 6(u_1)_x u_0 - 6(u_0)_y u_1 - 6(u_1)_y u_0 + (u_1)_{xxx} - (u_1)_{yyy} - 3(u_1)_{xyy} + 3(u_1)_{xxy}\Big]\, d\tau$$

$$= 36(2x + y)t^2$$

$$p^3: \quad u_3(x,y,t) = \int_0^t \Big[6(u_0)_x u_2 + 6(u_1)_x u_1 + 6(u_2)_x u_0 - 6(u_0)_y u_2 - 6(u_1)_y u_1 - 6(u_2)_y u_0 + (u_2)_{xxx} - (u_2)_{yyy} - 3(u_2)_{xyy} + 3(u_2)_{xxy}\Big]\, d\tau$$

$$= 216(2x + y)t^3$$

وهكذا بتكرار العملية لباقي التكرارات.

في المعادلة (1) فإن: $p \to 1$ عندما

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

وبالتالي نحصل على الحل في صورة المتسلسلة التالية:

$$u(x,y,t) = (2x + y)(1 + 6t + 36t^2 + 216t^3 + t^4 + t^5 + \cdots)$$

$$= (2x + y)(1 + 6t + (6t)^2 + (6t)^3 + (6t)^4 + (6t)^5 + \cdots)$$

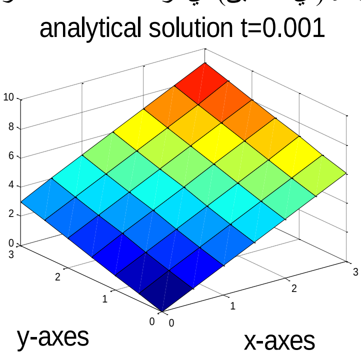
والذي يمكن تبسيطه الي الصورة المغلقة:

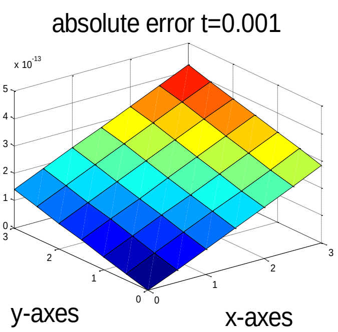
$$u(x,y,t) = \frac{(2x + y)}{(1 - 6t)}$$

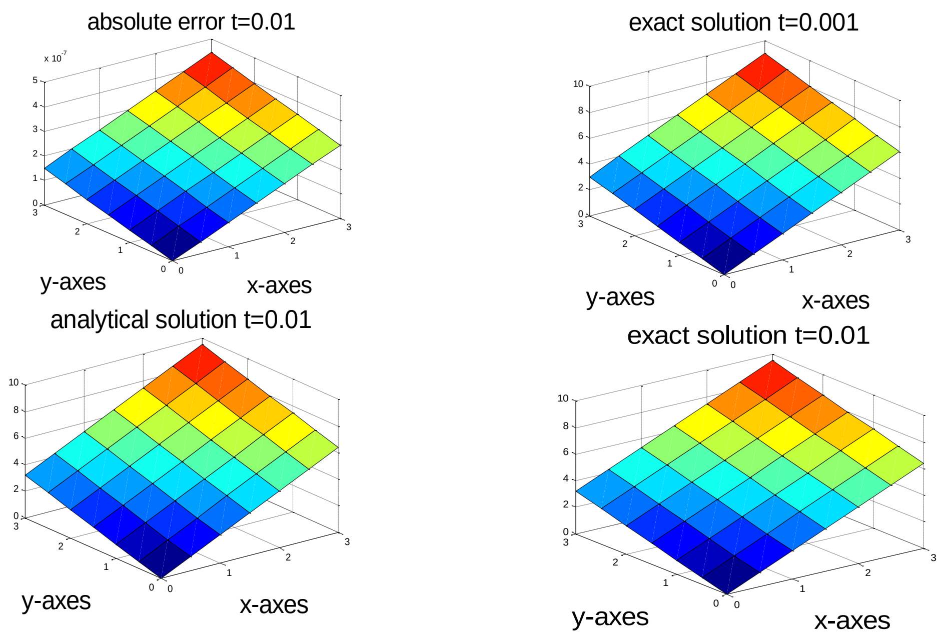
لبيان مدى تقارب VHPM وفاعليتها، الجدول التالي يتضمن مقارنة الحل الفعلي بالحل المتحصل عليه من تطبيق VHPM عند 5 تكرارات فقط عند أزمنة مختلفة مع $\Delta x = 0.5$:

t=0.01				
y	x	الحل الفعلي	حل VHPM	الخطأ المطلق
0.5	0.5	1.595744680851064	1.595744606400000	$7.445106376 \times e^{-8}$
1	1	3.191489361702128	3.191489212800001	$1.48902128 \times e^{-7}$
1.5	1.5	4.787234042553192	4.787233819200001	$2.233531911 \times e^{-7}$
2	2	6.382978723404256	6.382978425600001	$2.97804255 \times e^{-7}$
2.5	2.5	7.978723404255320	7.978723032000000	$3.72255319 \times e^{-7}$
3	3	9.574468085106384	9.574467638400002	$4.46706382 \times e^{-7}$
3.5	3.5	11.17021276595745	11.170212244800002	$5.211574461 \times e^{-7}$
4	4	12.7659574468085	12.765956851200002	$5.956085101 \times e^{-7}$
4.5	4.5	14.36170212765958	14.361701457600000	$6.70059574 \times e^{-7}$
5	5	15.95744680851064	15.957446064000000	$7.44510638 \times e^{-7}$
t=0.001				
0.5	0.5	1.509054325955735	1.509054325955664	$7.03881398 \times e^{-14}$
1	1	3.018108651911469	3.018108651911328	$1.40776279 \times e^{-13}$
1.5	1.5	4.527162977867203	4.527162977866992	$2.10498286 \times e^{-13}$
2	2	6.036217303822938	6.036217303822657	$2.81552559 \times e^{-13}$
2.5	2.5	7.545271629778672	7.545271629778320	$3.52606833 \times e^{-13}$
3	3	9.054325955734406	9.054325955733985	$4.20996571 \times e^{-13}$
3.5	3.5	10.56338028169014	10.563380281689648	$4.92050845 \times e^{-13}$
4	4	12.07243460764588	12.072434607645313	$5.63105118 \times e^{-13}$
4.5	4.5	13.58148893360161	13.581488933600976	$6.34159392 \times e^{-13}$
5	5	15.09054325955735	15.090543259556640	$7.05213665 \times e^{-13}$

نلاحظ الحصول علي دقة جيدة في النتائج حيث تم الحصول على 6 ارقام معنوية عند *t=0.01* و13 رقم معنوي عند *t=0.001* (أي التطابق) أي تزداد الدقة كلما صغرت قيمة *t*.







z

مثال (3):

أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية (Abassy et al ,2007):

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0\ ,\qquad -5 < x < 5\ ,\ \ 0 < t < 1$$

$$u(x,0) = -\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

الحل الفعلي للمسألة هو:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x-t}{2}\right)$$

الحل: باستخدام دالية التصحيح:

$$u_{n+1} = u_n + p\int_0^t \lambda(\tau)\{(u_n)_t - 6\tilde{u}_n(\tilde{u}_n)_x + (\tilde{u}_n)_{xxx}\}d\tau$$

حيث مضروب لاجرانج العام $\lambda(\tau) = -1$ ويفرض أن الحل على الصورة:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots \quad \rightarrow (1)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P^i u_i = u_0(x) - p\int_0^t \left\{-6\sum_{i=0}^{\infty} P^i u_i (u_n)_x + \sum_{i=0}^{\infty} P^i (u_n)_{xxx}\right\} d\tau \ \rightarrow (2)$$

بالتعويض بالمعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على:

$$u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots = -\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right) + p\int_0^t 6(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)_x d\tau - p\int_0^t (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)_{xxx} d\tau$$

بمقارنة معاملات متسلسلة القوى p من الطرفين:

$$p^0:\ \ u_0(x) = -\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$p^1:\ \ u_1(x,t) = 6\int_0^t u_0(u_0)_x d\tau - \int_0^t (u_0)_{xxx} d\tau$$

$$= \int_0^t -\frac{6}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\text{sech}\left(\frac{x}{2}\right)\text{sech}\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right]d\tau + \int_0^t \left[\frac{1}{2}sech^4\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)tanh^3\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}sech^4\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right]d\tau$$

$$= \int_0^t -\frac{3}{2}sech^4\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right)d\tau + \int_0^t \left[sech^4\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)tanh^3\left(\frac{x}{2}\right)\right]d\tau$$

$$= \int_0^t \left[-\frac{1}{2}sech^4\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)tanh^3\left(\frac{x}{2}\right)\right]d\tau$$

$$= \int_0^t \left[-\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\left[sech^2\left(\frac{x}{2}\right) + tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right]d\tau$$

$$= \int_0^t \left[-\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right)(1)\right]d\tau$$

$$= -\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right)t$$

$$p^2:\ \ u_2(x,t) = 6\int_0^t (u_0(u_1)_x + u_1(u_0)_x)d\tau - \int_0^t (u_1)_{xxx}d\tau$$

$$= \int_0^t -\frac{6}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)\left[-\frac{1}{4}sech^4\left(\frac{x}{2}\right)t + \frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)t\right]d\tau$$

$$+6\int_0^t \left[-\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right)t\right]d\tau$$
$$-\int_0^t \left[\frac{1}{2}sech^6\left(\frac{x}{2}\right)t-\frac{11}{4}sech^4\left(\frac{x}{2}\right)tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)t+\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)tanh^4\left(\frac{x}{2}\right)t\right]d\tau$$
$$=\int_0^t \left[\frac{1}{4}sech^6\left(\frac{x}{2}\right)t-\frac{1}{4}sech^4\left(\frac{x}{2}\right)tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)t-\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)tanh^4\left(\frac{x}{2}\right)t\right]d\tau$$
$$\therefore\quad u_2=\frac{1}{8}sech^6\left(\frac{x}{2}\right)t^2-\frac{1}{8}sech^4\left(\frac{x}{2}\right)tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)t^2-\frac{1}{4}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)tanh^4\left(\frac{x}{2}\right)t^2$$

وهكذا بتكرار العملية لباقي التكرارات.

عندما $p\to 1$ في المعادلة (1) فإن:

$$u=u_0+u_1+u_2+\cdots$$

وبالتالي نحصل على الحل في صورة المتسلسلة التالية:

$$u(x,t)=-\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)\tanh\left(\frac{x}{2}\right)t+\frac{1}{8}sech^6\left(\frac{x}{2}\right)t^2-\frac{1}{8}sech^4\left(\frac{x}{2}\right)tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)t^2-\frac{1}{4}sech^2\left(\frac{x}{2}\right)tanh^4\left(\frac{x}{2}\right)t^2+\cdots$$

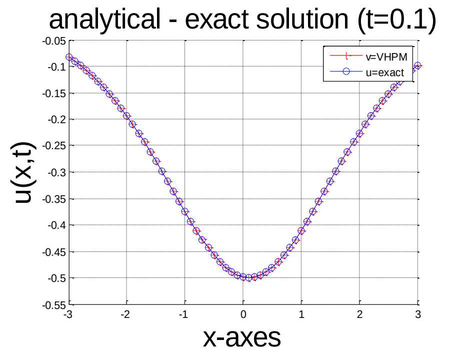
والذي يتقارب إلى الحل المغلق:

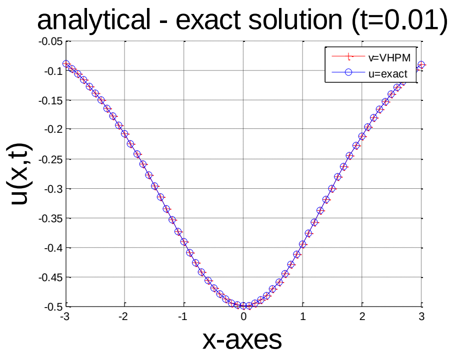
$$u(x,t)=-\frac{1}{2}sech^2\left(\frac{x-t}{2}\right)$$

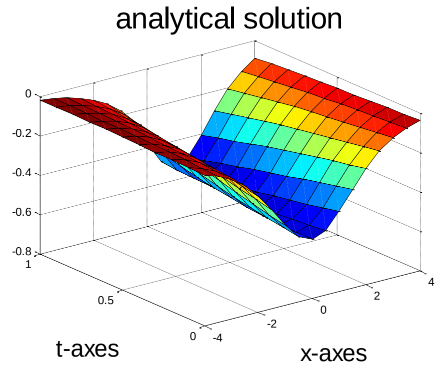
الجدول التالي يتضمن مقارنة الحل الفعلي بالحل المتحصل عليه من تطبيق VHPM عند **تكرارين فقط** عند أزمنة مختلفة مع $\Delta x=0.5$:

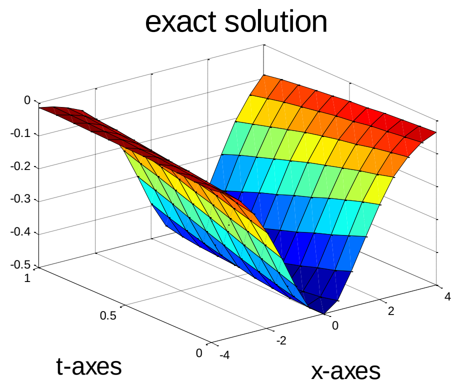
t=0.1			
x	**الحل الفعلي**	**حل VHPM**	**الخطأ المطلق**
-4	-0.032073455771370	-0.032077854031591	4.398260×10^{-6}
-3.5	-0.051779187019076	-0.051785007388862	5.8203698×10^{-6}
-3	-0.082498039025061	-0.082504315291878	6.27626682×10^{-6}
-2.5	-0.128716598351547	-0.128720031222174	3.432870×10^{-6}
-2	-0.194389409601251	-0.194383187271264	6.2223300×10^{-6}
-1.5	-0.279527583866122	-0.279503646254508	2.3937612×10^{-5}
-1	-0.374739759095041	-0.374699061143212	4.0697952×10^{-5}
-0.5	-0.457568480913315	-0.457532497869829	3.598304×10^{-5}
0	-0.498752080385784	-0.498750000000000	2.080386×10^{-6}
0.5	-0.480521491483058	-0.480555215810757	3.3724328×10^{-5}
1	-0.411000614684527	-0.411042160212391	4.154553×10^{-5}
1.5	-0.317369794991229	-0.317395731368409	2.5936378×10^{-5}
2	-0.226360518523862	-0.226368187693726	7.6691699×10^{-6}
2.5	-0.152509998103705	-0.152507165560348	2.8325434×10^{-6}
3	-0.098867137873287	-0.098860945156256	6.192717×10^{-6}
3.5	-0.062504935316723	-0.062498999659527	5.9356572×10^{-6}
4	-0.038893336004912	-0.038888788402946	4.5476020×10^{-6}
t=0.01			
-4	-0.034986440330607	-0.034986444795921	4.4653142×10^{-9}
-3.5	-0.056372701829506	-0.056372707703585	5.874079×10^{-9}
-3	-0.089538774830992	-0.089538781076228	6.245235×10^{-9}
-2.5	-0.139022134849523	-0.139022138026318	3.1767954×10^{-9}
-2	-0.208391812808499	-0.208391805952645	6.855854×10^{-9}
-1.5	-0.296399892569577	-0.296399867731679	2.483790×10^{-8}
-1	-0.391403220097401	-0.391403178971453	4.112595×10^{-8}
-0.5	-0.468846687861523	-0.468846652830514	3.503101×10^{-8}
0	-0.499987500208331	-0.499987500000000	2.08331×10^{-10}
0.5	-0.471148889819630	-0.471148924624606	3.480498×10^{-8}
1	-0.395037447667356	-0.395037488878371	4.1211015×10^{-8}
1.5	-0.300189051205060	-0.300189076243069	2.503801×10^{-8}
2	-0.211590298994327	-0.211590305994891	7.000564×10^{-9}
2.5	-0.141400854576949	-0.141400851460135	3.1168132×10^{-9}
3	-0.091174450299589	-0.091174444062666	6.236923×10^{-9}
3.5	-0.057444112816280	-0.057444106930652	5.88561×10^{-9}
4	-0.035667542713312	-0.035667538233057	4.48026×10^{-9}

نلاحظ الحصول علي دقة جيدة تتراوح من 3 أرقام معنوية عند $t=0.1$ و 8 أرقام معنوية عند $t=0.01$ عند **تكرارين فقط** هنا وبزيادة عدد التكرارات نتحصل على نتائج أفضل حيث تزداد الدقة كلما زاد عدد التكرارات وصغرت قيمة t.

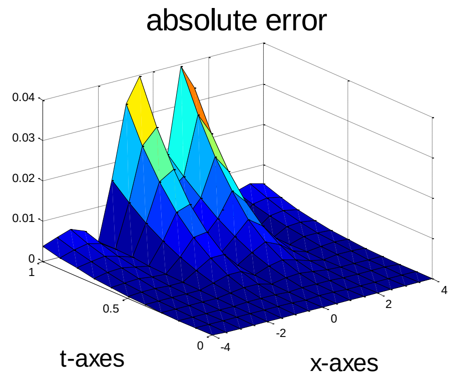








الأشكال التالية توضح تمثيل الحل المتحصل عليه من VHPM والحل الفعـــــــــــلي **لتكرارين فقط** عند $t = 0.1$ ، $t = 0.01$.



الاستنتاج

في هذه الدراسة، تم تطبيق طريقة هوموتوبي الاضطراب التغايبرية لحل معادلات كيرنويج دي- فرايس غير الخطية في بعد واحد وبعدين مع الشروط الابتدائية. هذه الطريقة تعتبر اقترانا لطريقتي هوموتوبي الاضطراب الكلاسيكية وطريقة التكرارات التغايرية وهي تعتمد على مضروب لاجرانج العام وتزودنا بتقريبات متتالية للحل. النتائج المتحصل عليها تم مقارنتها بالحلول الفعلية للمسائل، حيث أظهرت المقارنة كفاءة وفعالية طريقة هوموتوبي الاضطراب التغايرية في حل هذا النوع من المسائل غير الخطية وتقاربها السريع الي الحل الفعلي، حيث تم الحصول علي دقة عالية في النتائج تتراوح من ثلاثة الي ثلاثة عشر رقم معنوي للمسائل المدروسة عند أزمنة صغيرة. أضافة الي ذلك، فأن طريقة هوموتوبي الاضطراب التغايرية وخلافا لأغلب الطرق العديدة الأخرى–عادة ما تقود الي الحل المغلق للمسائل بأقل عدد ممكن من التكرارات.

المراجع:

إبراهيم، قيس؛ محمود، هبة (2018). *حل مسائل القيم الابتدائية ذات الرتب الكسرية باستخدام هوموتوبي التحليلية وتحسينها باستخدام تقريبات بادي*. كلية التربية للعلوم الصرفة، جامعة الموصل، العراق.

M. Miura, Robert (1976). *The Korteweg-de Vries Equation: A Survey of Results SIAM Revie*. Vol.18, No 3.pp. 412-459, Published by Society of Industrial and Applied Mathematics

M. Miura, Robert (1976). *The Korteweg-de Vries Equation: A Survey of Results SIAM Revie*. Vol.18, No 3.pp. 412-459, Published by Society of Industrial and Applied Mathematics.

M. E. Zayed, Elsayed ; M. Abdel Rahman, Hanan (2010). *The Variational Iteration Method and the Variational Homotopy Perturbation method for solving the KdV-Burgers equation and the Sharma- Tasso- Olver equation*. Department of Mathematics, Faculty of Science, Zagazig University, Zagazig, Egypt.

Abey sheriff, Kelil; Appanah Rao Appadu (2012). *On the Numerical Solution of 1D and*

A. Abassy, Tamer; A. El-Tawil, Magdy; H. El Zoheiry(2007). *Toward a modified variational iteration method.* Journal of Computational and Applied Mathematics 207 (2007) 137 – 147.

Saglam Özkan, Yesim; Yasar, Emrullah and Çelik, Nisa(2021). *On the exact and numerical solutions to a new dimensional Korteweg-de Vries equation (1+2) with conformable derivative*. Nonlinear Engineering 2021; 10: 46–65. https://doi.org/10.1515/nleng-2021-0005.

M.A. Noor, S.T. Mohyud-Din(2008).*Variational homotopy perturbation method for solving higher dimensional initial boundary problems*. Mathematical problems in engineering (2008) 1-11.

2D KdV Equations Using Variational Homotopy Perturbation finite Difference methods. Department of Mathematics and Applied Mathematics, Nelson Mandela University, Port Elizabeth 603, South Africa.

A.Bouhssoun; M.Hamdi Cherif and M.Zellal (2013). *Variational homotopy perturbation method for the approximate solution of the foam drainage equation with time and space fractional derivatives*. Maya Journal of Matematik 4(1)(2013), 163—170.

Wazwaz; Abdul-Majid (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Department of Mathematics Saint Xavier University Chicago, IL 60655,USA .Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009.